Ejercicios Unidades 1 y 2

Probabilidad I 2025-2

Entrega: sábado 22 de febrero

Para todas las siguientes preguntas considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. **En todos los problemas acompañe su respuesta con un diagrama simple que ilustre claramente los pasos de su razonamiento.**

1. Si $A, B \in \mathcal{F}$, pruebe que

   a)
   $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

   b)
   $$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

2. Consideremos una diana con tres anillos concéntricos de radios 1, 2 y 3. Si un dardo se lanza aleatoriamente sobre la diana,

   (a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

   (b) Defina una media de probabilidad sobre el espacio de eventos $\mathcal{F}$. No es necesario especificar cuál es el espacio de eventos.

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el anillo más interno?

   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el anillo intermedio?

   (e) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el anillo externo?

3. Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{F}$, pruebe que

   a) Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para toda n, entonces $\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = 1$

   b) Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para alguna n, entonces $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = 1$

   c) Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para alguna n, entonces $\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = 0$

   d) Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para toda n, entonces $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = 0$

4. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos. Demuestra que:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

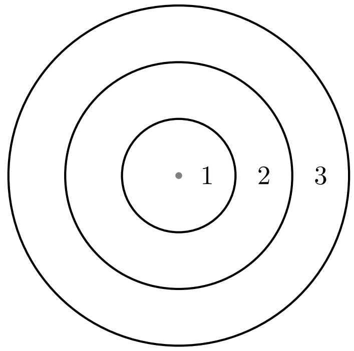

Figura 1: Representación de la diana.

5. Demuestre que la interpretación clásica de la probabilidad satisface los axiomas de una medida de probabilidad.

6. Suponga que simultáneamente se lanza una moneda justa, un dado balanceado y se toma una carta al azar de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila, un puntaje de 5 o 6 en el dado y obtener personaje rojo?

7. Pruebe que
$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m},$$
e interprete este resultado.

8. Si $E \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(E) > 0$, muestre que $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ dada por
$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|E),$$
es una medida de probabilidad.

9. Se tienen dos urnas: La urna A contiene 4 bolas rojas y 6 bolas azules. La urna B contiene 5 bolas rojas y 5 bolas azules. Se sigue el siguiente procedimiento:

   1. Se extrae una bola al azar de la urna A.

   2. Si la bola extraída es roja, se transfiere a la urna B y luego se extrae una bola de la urna B.

   3. Si la bola extraída de la urna A es azul, se transfiere a la urna B y luego se extrae una bola de la urna B.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea roja?

   (b) Si se sabe que la bola extraída de la urna B es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bola transferida desde la urna A haya sido roja?

10. En un ensayo clínico, se prueba un nuevo test para detectar una enfermedad. Se sabe que:

    - La prevalencia de la enfermedad en la población es del 2 %.

- La sensibilidad del test (probabilidad de que el test sea positivo dado que la persona tiene la enfermedad) es del 95 %.
- La especificidad del test (probabilidad de que el test sea negativo dado que la persona no tiene la enfermedad) es del 90 %.

(a) Calcula la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga un resultado positivo en el test.

(b) Si una persona recibe un resultado positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad? (Usa la regla de Bayes).

(c) Discute la importancia de la especificidad y la sensibilidad en el contexto de los falsos positivos y falsos negativos.

11. En el famoso programa de Chabelo, un concursante debe elegir entre tres puertas, detrás de una de las cuales hay un premio grande, mientras que detrás de las otras dos hay premios de menor valor. El concursante elige una puerta, pero antes de abrirla, Chabelo, quien sabe dónde está el premio grande, abre una de las otras dos puertas y muestra un premio de menor valor. Luego, le da al concursante la opción de cambiar su elección a la otra puerta restante.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio grande si el concursante mantiene su elección original?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio grande si el concursante decide cambiar de puerta?

    (c) ¿Cuál es la estrategia óptima para maximizar la probabilidad de ganar el premio grande? Explica tu razonamiento.

12. Si E y F son dos eventos independientes, muestre que también lo son E y F^c; E^c y F; y E^c y F^c.

13. Encuentre un ejemplo con tres eventos E, F y G donde la independencia a pares no garantice la independencia de A, B y C.

14. Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa de probabilidad dada por:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    (a) Verifica que esta es una función de masa de probabilidad válida.

    (b) ¿Cuál es el soporte de esta variable aleatoria?

    (c) Calcula $P(X \leq 4)$.

15. Sea Y una variable aleatoria con función de distribución acumulada definida por:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y}{4}, & 0 \leq y < 4, \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}$$

    (a) Demuestre que F_Y es una función de distribución

    (a) Determina la función de masa de probabilidad de Y.

    (b) Calcula $\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 3)$.